# 3 用格子點串起的面積公式

數學經文

格子點，井然有序地座落在平面上的孤立點，他們沒有輕重之分，也無好壞之別。穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面…一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介。

欲瞭解幾何與代數的融合，需時常唸誦華羅庚的名言「數與形，本是相倚依，焉能分作兩邊飛，數缺形時少直覺，形少數時難入微，數形結合百般好，隔裂分家萬是非，切莫忘，幾何代數統一體，永遠聯繫，切莫分離。」

指考《數學乙》考過如下的填充題：

當平面上的點$(x,y)$之座標$x$與$y$都是整數，稱點$(x,y)$為格子點。數學家知道：座標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式

$$aS+bI+c$$

來表示，其中$S$代表三角形的周長上（三邊邊上）的格子點數，$I$是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數，$a,b,c$是固定的常數。求常數$a,b$與$c$的值。

這是有名的皮克公式，只需選定幾個以格子點為頂點的三角形便能求得公式中的常數$a,b$與$c$的值。

**題目：(皮克公式)** 以格子點為頂點的三角形面積可表為下列形式

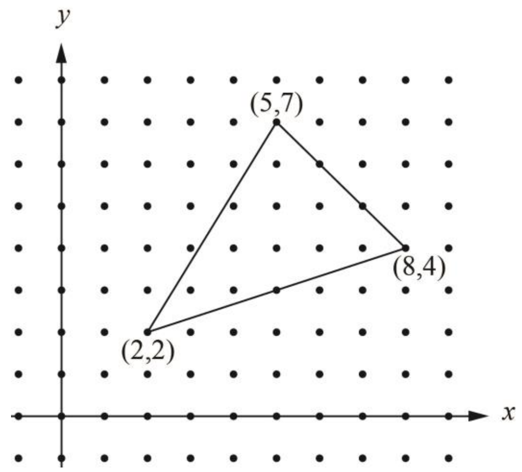
$$\frac{S}{2}+I-1,$$

其中$S$代表三角形的周長上的格子點數，$I$是落在三角形內部的格子點數。

現在讓我們以不同的角度來探索皮克公式！

### 3.1 井然有序的格子點

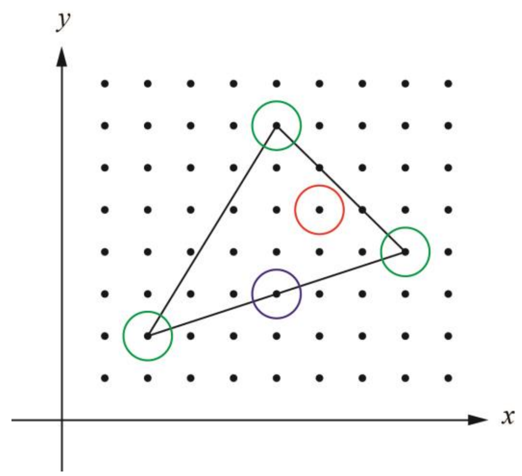
如下圖所示，$x$ 與 $y$ 座標都是整數的點（稱它們為格子點）井然有序的分佈於整個平面上：




觀察以格子點 (2,2), (5,7), (8,4)為頂點的三角形，內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。內部每個格子點附近的區域都在三角形內；而邊上的格子點中，在邊上但不是頂點的格子點附近幾乎有一半的區域在三角形內部，另一半在外部；但頂點附近，絕大部分的區域都在三角形外部。因此，三角形面積受其內部與邊上的格子點數影響。在下一小節中，我們將精細的討論這影響有多大。

### 3.2 用格子點串起的念珠…皮克公式

在前一小節中，我們將三角形內部或邊上的格子點區分成三類：內部格子點，邊上非頂點格子點與頂點格子點。現在各取一點為圓心，畫圓如下圖所示：



一種富有創意的思維：

① 當格子點在三角形內部時（如紅色圓圈所示）：

因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到$I$單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如藍色圓圈所示）：

因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以$\frac{1}{2}$單位的面積計算，此部分得到$\frac{S-3}{2}$單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如綠色圓圈所示）：

因為三內角和為$180^\circ$，所以三頂點附近的區域只能拼出半個圓，也就是$\frac{1}{2}$單位面積。

綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

從“富有創意的思維”中，是否可以啟發你推導以格子點為頂點的四邊形，五邊形，…，甚至多邊形的面積公式呢？嘗試四邊形的情形看看！

**練習 1**　利用上述方法推導以格子點為頂點的四邊形面積公式（以符號$S,I$表示）。

### 3.3 師父中的師父

談到三角形的面積公式，不外乎會想到類似

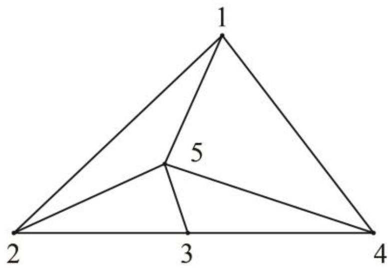
$$\frac{底\times高}{2},\frac{1}{2}ab\sin\angle C,\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

這樣的公式。這幾個面積公式的推導並不困難，而且其證明互有因果關係。不像皮克公式，自成一格，特別是公式中的常數$\frac{1}{2},1,-1$充分反應了三角形內部、邊上與頂點這些格子點的份量。將幾何與代數完全融合，這也印證華羅庚說的「…數缺形時少直覺，形少數時難入微…」。皮克以三角形內部、邊上的格子點為珠子，然後用他腦中細微無形的線串出漂亮的「皮克公式」這串念珠。因此，皮克可以說是研究三角形面積公式的“師

父中的師父”。

幾何圖形必須透過眼睛來欣賞與觀察，但是沒有耳朵的話，卻無法聆聽他所發出的天籟之音；同樣的，代數式子必須靠靈敏的耳朵來聆聽，但是沒有眼睛的話，卻無法看到他所呈現的美貌。因此，「沒有幾何的代數是瞎子、沒有代數的幾何是聾子。」對一位眼、耳健全的人，不應輕易放棄他可以同時擁有欣賞與聆聽的本能。

**練習 2(稜線定理)** 十八世紀盛行的「三角測量」就是將欲丈量的凸多邊形切割成若干個小三角形來一一丈量。如下圖




就是一個三角形被切割成四個小三角形的情形，其中1,2,3,4,5稱之為丈量點，兩丈量點之間的黑線（需丈量的線）稱之為丈量稜線（上圖中恰有 8 條丈量稜線)。

在丈量凸多邊形的所有丈量點數記為$B$，內部（不含邊上）的丈量點數記為$I$；所需丈量的丈量稜線數記為$S$。

根據「三角測量」的經驗法則得知：會有實數$a,b,c$使得式子

$$S = aB + bI + c$$

恆成立。試以幾個實際的圖例求出$a,b,c$的值。

**練習 3(尤拉公式)** 承練習 2 的符號，令丈量點與丈量稜線所分割出的三角形總數有$T$個。已知會有實數$a,b,c$使得式子

$$T = aB + bS + c$$

恆成立，試求$a,b,c$的值。

**3.4 皮克公式的插曲**

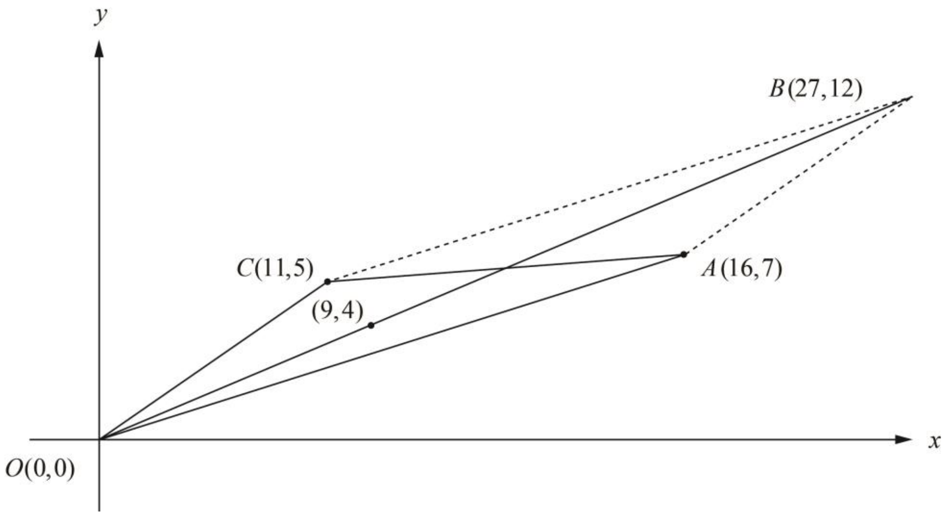
大家都很好奇「介於$\frac{7}{16}<\frac{b}{a}<\frac{5}{11}$之間的分數$\frac{b}{a}$有無窮多個，究竟分母$a$最小的那個分數是誰呢？」你可曾想過皮克公式對這樣的問題是有幫助的嗎？

讓我先解釋一下數學經文的部分「…穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面…一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介…。」

通過兩個格子點的直線之斜率剛好是

$$\frac{\text{兩格子點的 }y\text{ 坐標差}}{\text{兩格子點的 }x\text{ 坐標差}}$$

這個有理數。相反的，有理數$\frac{7}{16}$與$\frac{5}{11}$可以想成是通過 (0, 0), (16, 7)與通過 (0, 0), (11, 5)這兩條直線的斜率。考慮如下的示意圖：




① 四邊形$OABC$是一個平行四邊形，$B$點座標為

$$(27,12)=(16,7)+(11,5).$$

直線$OB$通過格子點(9, 4)，且該直線的斜率為$\frac{4}{9}$。

② 三角形$OAC$的面積為

$$\frac{1}{2}|11\cdot 7-16\cdot 5|=\frac{3}{2}.$$

③ 三角形$OAC$的邊上格點僅頂點 3 個而已，根據皮克公式知道

$$\frac{3}{2}+I-1=\frac{3}{2}\Rightarrow I=1.$$

因此三角形$OAC$的內部格子點數僅一點，即(9, 4)是三角形$OAC$內部唯一的格子點。

綜合得到：通過(0,0), (9,4)的直線的斜率$\frac{4}{9}$是介於$\frac{7}{16}<\frac{b}{a}<\frac{5}{11}$之間的分數$\frac{b}{a}$，分母$a$最小的那個。故答案為

$$\frac{4}{9}.$$

**練習 4**　考慮底下兩個問題：

(1) 試求以 (0,0), (8,5), (13,8)為頂點的三角形內部格子點之數目。

(2) 求介於$\frac{5}{8}$與$\frac{8}{13}$之間分母最小的分數。

### 3.5 宰相肚裡可撐船…有容乃大的秘訣

這節對皮克三角形面積公式

$$\frac{S}{2}+I-1$$

與練習 2 的稜線定理

$$S=2B+I-3$$

作解釋如下：

① 皮克公式$\frac{S}{2}+I-1$：

由公式得知，三角形邊上每個格子點的貢獻是$\frac{1}{2}$；但三角形內部的每個格子點之貢獻是 1。因此，內部格子點數越多的三角形，其面積就越大。

② 稜線定理$S=2B+I-3$：

此公式說，邊上每設立一丈量點會貢獻出 2 條丈量稜線；但內部每設立一丈量點會貢獻出 3 條丈量稜線。欲使丈量稜線越少，應儘可能將丈量點設在邊上，不要設在內部。也就是說，內部丈量點越多的多邊形，其丈量稜線就越多。

### 3.6 廓庵十牛圖的啟示

從畢達哥拉斯的畢氏定理，將直角三角形與代數$c^2 = a^2 + b^2$相連結，皮克公式，將格子點三角形面積與代數$\frac{S}{2} + I - 1$相連繫，到稜線定理，將多邊形與代數$S = 2B + I - 3$相銜接，都讓華羅庚的名言「數缺形時少直覺，形少數時難入微」餘音繞樑，三月不止。這樣的例子不僅數學上有，其它領域也不遑多讓。在十二世紀時，宋朝廓庵禪師對修行、求法的過程作了前無古人，後無來者的妙喻，且讓我們接受他的點化吧！

《十牛圖》最初有八幅畫，不是十幅，它們不是佛教的，是道教的。它們的起始不詳，沒有人知道它們是怎麼開始的，誰畫出了第一幅牛圖。但在十二世紀，宋朝廓庵禪師把它們重畫了一遍，不僅如此，他還增加了兩幅畫，八幅變成了十幅。這十圖分別為一、尋牛，二、見跡，三、見牛，四、得牛，五、牧牛，六、騎牛歸家，七、忘牛存人，八、人牛俱忘，九、返本還源，十、入廛垂手。

廓庵畫《十牛圖》的目的，是為了探尋“禪宗的修行、求法”這不可表達的內在旅程作出獨特的嘗試。但他畫了《十牛圖》後並不滿足，於是他寫了詩來補充，作為附錄。首先他畫了這十幅圖畫；覺得不滿意，他寫了十首小詩，畫中缺了什麼，他就嘗試在詩歌中補充它們。他還是覺得不滿意，於是他又寫了十篇散文注釋。我知道他一定仍然覺得不滿意，但沒有什麼可做了。真實是博大的，表達是有限的，但他盡了最大的努力。

對修行者來說：「圖畫是無意識的語言，它是視覺化的語言；文字是有意識的語言，它是頭腦裡的語言；而詩歌是潛意識的語言，它是溝通圖與文字的橋樑。」圖、詩歌與文字都無法完全描述修行、求法的全部，但圖可以無限想像，可以給點暗示，詩歌與文字可以補充說明，兩者對內在旅程的探尋不無小補；但對數學家來說：「幾何是欣賞的語言，它是視覺化的語言；而代數是聆聽的語言，它是思考化的語言。」幾何圖形永遠無法十分精確，但提供無限的想像與漣漪，代數式子很難有浪漫的聯想，但提供縝密的解釋；因此幾何與代數的互補性足以刻畫科學的現象與性質。

在此提供《十牛圖》的圖供參考，值得注意的是第八圖是個空圖，就是“空無”的意思。

第一圖：尋牛

忙忙撥草去追尋，
水闊山遙路更深。
力盡神疲無處覓，
但聞楓樹晚蟬吟。

第二圖：見跡

水邊林下跡偏多，
芳草離披見也麼，
縱是深山更深處，
遼天鼻孔怎藏他?

第三圖：見牛

黃鶯枝上一聲聲，
日暖風和岸柳青，
只此更無回避處，
森森頭角畫難成。

第四圖：得牛

竭盡精神獲得渠，
心強力壯卒難除，
有時才到高原上，
又入煙雲深處居。

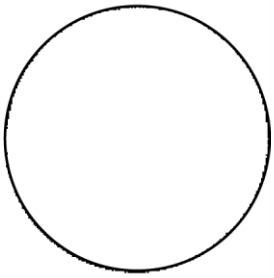
第五圖：牧牛

鞭索時時不離身，
恐伊縱步入埃塵，
相將牧得純和也，
羈鎖無拘自逐人。

第六圖：騎牛歸家

騎牛迤邐欲還家，
羌笛聲聲送晚霞。
一拍一歌無限意，
知音何必鼓唇牙。

第七圖：忘牛存人
騎牛已得到家山，
牛也空兮人也閑，
紅日三竿猶作夢，
鞭繩空頓草堂間。



第八圖：人牛俱忘
鞭索人牛盡屬空，
碧天廖廓信難通。
紅爐焰上爭熔雪，
到此方能合祖宗。

第九圖：返本還源
返本還源已費功，
爭如直下若盲聾，
庵中不見庵前物，
水自茫茫花自紅。

第十圖：入廛垂手
露胸跣足入廛來，
抹土涂灰笑滿腮。
不用神仙真秘訣，
直教枯木放花開。

### 3.7 途徑雖多，旅人卻少

在這章裡，用了三種不同的語言來描述數學，第一種是意識頭腦裡的語言（白話文），鉅細靡遺地描述了“皮克面積公式及其應用”；第二種是潛意識裡的語言（詩文），寫下模糊中帶有清晰,提示中帶有暗示的“數學經文”;第三種是無意識裡的語言(圖畫)，借助廓庵禪師的《十牛圖》讓讀者對數學的學習，帶有“橫看成嶺，側成峰，高低遠近解讀各不同”的風韻，圖畫描述數學可虛擬，可實際，有模糊，有清晰，既提示，又暗示，讓人留下無限的解讀與想像空間。

頭腦清晰的人就可以用白話文這種語言描寫數學，這樣的人可以當老師；作點夢或喝點

酒的人才能用詩文般的語言描述數學，就如同華羅庚的詩「數缺形時少直覺，形少數時難入微」一樣，這樣的人足以當師父；發點瘋的人可以用圖畫般的語言描述數學，就如同廓庵禪師用《十牛圖》描述“修行、求法”一樣，這樣的人就是師父中的師父。

# 用格子點串起的面積公式的練習題解答

## 練習 1

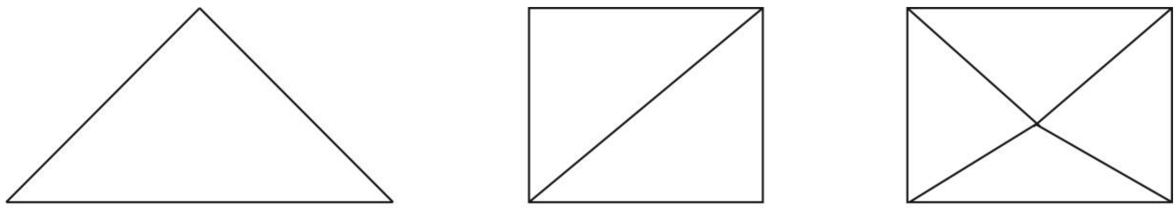
四邊形的面積公式為

$$I+\frac{S-4}{2}+1=\frac{S}{2}+I-1.$$

〔註〕公式中的 1 是由四邊形內角和 $360^{\circ}$ 產生的。各位是否注意到這公式與三角形的面積公式完全一樣。這是巧合，還是所有以格子點為頂點的多邊形面積公式都是這個形式呢？

## 練習 2

考慮以下三個測量圖：



$S=3,B=3,I=0$　　$S=5,B=4,I=0$　　$S=8,B=5,I=1$

根據公式得到

$$\begin{cases}3a+c=3\\4a+c=5\\5a+b+c=8\end{cases}\quad\Rightarrow a=2,b=1,c=-3.$$

故

$$S=2B+I-3.$$

## 練習 3

將練習 2 的三個測量圖的 $B,S$ 值代入公式得到

$$\begin{cases} 3a+3b+c=1 \\ 4a+5b+c=2 \\ 5a+8b+c=4 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=1, c=1.$$

故

$$T=-B+S+1.$$

**練習 4**

令 $O=(0,0), A=(13,8), C=(8,5)$，且 $B$ 為在第一象限與 $O, A, C$ 行成平行四邊形 $OABC$ 的點。

解法如下

① 四邊形 $OABC$ 是一個平行四邊形，$B$ 點座標為

$$(21,13)=(13,8)+(8,5).$$

直線 $OB$ 的斜率為 $\frac{13}{21}$ 。

② 三角形 $OAC$ 的面積為

$$\frac{1}{2}|13\cdot 5-8\cdot 8|=\frac{1}{2}.$$

③ 三角形 $OAC$ 的邊上格點僅頂點 3 個而已，根據皮克公式知道

$$\frac{3}{2}+I-1=\frac{1}{2} \Rightarrow I=0.$$

因此三角形 $OAC$ 的內部格子點數為零個。

綜合得到：通過 $(0,0),(21,13)$ 的直線的斜率 $\frac{13}{21}$ 是介於 $\frac{7}{16}<\frac{b}{a}<\frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$ ，分母 $a$ 最小的那個。故答案為

$$\frac{13}{21}.$$